Γραμμικη Αλγεβρα ΙΙ

Ασκησεις - Φυλλαδιο 7

Διδασκοντες: Ν. Μαρμαρίδης - Α. Μπεληγιάννης

Βοηθοι Ασκησεων: Χ. Ψαρουδάκης

Ιστοσελιδα Μαθηματος:

http://users.uoi.gr/abeligia/LinearAlgebraII/LAII.html

30 - 5 - 2012

Άσκηση 1. *Έστω $(\mathcal{E}, \langle , \rangle)$ ένας Ευκλείδειος χώρος και θεωρούμε τη γραμμική απεικόνιση*

$$f : \mathcal{E} \longrightarrow \mathcal{E}, \quad f(\vec{x}) = \lambda\vec{x}$$

όπου $\lambda \in \mathbb{R}$, $\lambda \neq 0$. Να δείξετε ότι η f είναι ισομορφισμός, αλλά γενικά όχι ισομετρία. Να βρεθεί αναγκαία και ικανή συνθήκη έτσι ώστε η f να είναι ισομετρία.

Λύση. *Έστω $\vec{x} \in \operatorname{Ker} f$. Τότε $f(\vec{x}) = \lambda\vec{x} = \vec{0}$ και αφού $\lambda \neq 0$ έπεται ότι $\vec{x} = \vec{0}$. Άρα $\operatorname{Ker} f = \{\vec{0}\}$ και επομένως η f είναι ένα προς ένα. Έστω $\vec{y} \in \mathcal{E}$. Τότε υπάρχει $\vec{x} = \frac{1}{\lambda}\vec{y} \in \mathcal{E}$ έτσι ώστε $f(\vec{x}) = \lambda\frac{1}{\lambda}\vec{y} = \vec{y}$. Συνεπώς η f είναι επί και άρα ισομορφισμός. Έχουμε:*

$$\|f(\vec{x})\| = \|\lambda\vec{x}\| = |\lambda| \cdot \|\vec{x}\| \neq \|\vec{x}\|$$

Επομένως η f γενικά δεν είναι ισομετρία. Έστω $\vec{x} \in \mathcal{E}$. Τότε:

$$\begin{aligned}
\|f(\vec{x})\|^2 = \|\vec{x}\|^2 &\iff \big\langle f(\vec{x}), f(\vec{x})\big\rangle = \big\langle \vec{x}, \vec{x}\big\rangle \\
&\iff \big\langle \lambda\vec{x}, \lambda\vec{x}\big\rangle = \big\langle \vec{x}, \vec{x}\big\rangle \\
&\iff \lambda^2\big\langle \vec{x}, \vec{x}\big\rangle = \big\langle \vec{x}, \vec{x}\big\rangle \\
&\iff \lambda^2 = 1 \\
&\iff \lambda = \pm 1
\end{aligned}$$

Άρα η f είναι ισομετρία αν και μόνο αν $\lambda = \pm 1$. $\square$

Άσκηση 2. *Έστω $(\mathcal{E}, \langle , \rangle)$ ένας Ευκλείδειος χώρος πεπερασμένης διάστασης.*

(1) *Αν $\vec{x}, \vec{y}$ είναι δύο διανύσματα του $\mathcal{E}$ έτσι ώστε $\|\vec{x}\| = \|\vec{y}\|$, να δείξετε ότι υπάρχει μια ισομετρία $f : \mathcal{E} \longrightarrow \mathcal{E}$, έτσι ώστε: $f(\vec{x}) = \vec{y}$.*

(2) *Αν $\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}, \vec{w}$ είναι τέσσερα διανύσματα του $\mathcal{E}$ έτσι ώστε*

$$\|\vec{x}\| = \|\vec{y}\| \qquad \text{και} \qquad \|\vec{z}\| = \|\vec{w}\|$$

να εξετασθεί αν υπάρχει ισομετρία $f : \mathcal{E} \longrightarrow \mathcal{E}$, έτσι ώστε:

$$f(\vec{x}) = \vec{y} \qquad \text{και} \qquad f(\vec{z}) = \vec{w}$$

Λύση. (1) *Αν $\vec{x} = \vec{0}$, τότε επειδή $\|\vec{x}\| = \|\vec{y}\|$, έπεται ότι $\vec{y} = \vec{0}$. Τότε προφανώς κάθε ισομετρία $f : \mathcal{E} \longrightarrow \mathcal{E}$, έχει την επιθυμητή ιδιότητα $f(\vec{x}) = f(\vec{0}) = \vec{0} = f(\vec{0}) = f(\vec{y})$.*

Έστω $\vec{x} \neq \vec{0}$, και επομένως $\vec{y} \neq \vec{0}$. Θέτουμε:

$$\vec{e}_1 = \frac{\vec{x}}{\|\vec{x}\|} \qquad \text{και} \qquad \vec{\epsilon}_1 = \frac{\vec{y}}{\|\vec{y}\|}$$

Συμπληρώνουμε τα μοναδιαία διανύτσματα $\vec{e}_1$ *και* $\vec{\epsilon}_1$ *σε ορθοκανονικές βάσεις του* $\mathcal{E}$:

$$\mathcal{B} = \{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \cdots, \vec{e}_n\} \qquad \textit{και} \qquad \mathcal{C} = \{\vec{\epsilon}_1, \vec{\epsilon}_2, \cdots, \vec{\epsilon}_n\}$$

Τότε όπως γνωρίζουμε υπάρχει μοναδική ισομετρία $f : \mathcal{E} \longrightarrow \mathcal{E}$ *έτσι ώστε:*

$$f(\vec{e}_i) = \vec{\epsilon}_i \qquad 1 \leq i \leq n$$

Άρα υπάρχει ισομετρία $f : \mathcal{E} \longrightarrow \mathcal{E}$, *έτσι ώστε:*

$$\frac{\vec{y}}{\|\vec{y}\|} = \vec{\epsilon}_1 = f(\vec{e}_1) = f(\frac{\vec{x}}{\|\vec{x}\|}) = \frac{1}{\|\vec{x}\|} f(\vec{x})$$

και επειδή $\|\vec{x}\| = \|\vec{y}\|$, *η παραπάνω σχέση δείχνει ότι:* $f(\vec{x}) = \vec{y}$.

(2) *Έστω ο Ευκλείδειος χώρσο* $\mathcal{E} = \mathbb{R}^3$ *εφοδιασμένος με το συνηθισμένο εσωτερικό γινόμενο, και έστω:*

$$\vec{x} = (1,0,0), \qquad \vec{y} = (1/3, 2/3, 2/3), \qquad \vec{z} = (0,1,1), \qquad \vec{w} = (1,0,1)$$

Τότε υπολογίζουμε εύκολα:

$$\|\vec{x}\| = 1 = \|\vec{y}\| \qquad \textit{και} \qquad \|\vec{z}\| = \sqrt{2} = \|\vec{w}\|$$

Αν υπήρχε ισομετρία $f : \mathcal{E} \longrightarrow \mathcal{E}$, *έτσι ώστε:*

$$f(\vec{x}) = \vec{y} \qquad \textit{και} \qquad f(\vec{z}) = \vec{w} \tag{$*$}$$

τότε θα είχαμε:

$$0 = \langle \vec{x}, \vec{z} \rangle = \langle f(\vec{x}), f(\vec{z}) \rangle = \langle \vec{y}, \vec{w} \rangle = 1$$

το οποίο είναι άτοπο. Άρα δεν υπάρχει ισομετρία με την επιθυμιτή ιδιότητα.

Παρατήρηση: *Αν επιπλέον ισχύει ότι:* $\langle \vec{x}, \vec{z} \rangle = \langle \vec{y}, \vec{w} \rangle$, *τότε υπάρχει ισομετρία* $f : \mathcal{E} \longrightarrow \mathcal{E}$, *έτσι ώστε να ισχύουν οι σχέσεις* $(*)$. *Δείξτε το σαν* Άσκηση. $\square$

Άσκηση 3. *Έστω* $(\mathcal{E}, \langle , \rangle)$ *ένας Ευκλείδειος χώρος πεπερασμένης διάστασης, και*

$$f : \mathcal{E} \longrightarrow \mathcal{E}$$

μια ισομετρία. Να δείξετε ότι αν $\mathcal{V}$ *είναι ένας υπόχωρος του* $\mathcal{E}$, *τότε:*

$$f(\mathcal{V}) \subseteq \mathcal{V} \qquad \Longrightarrow \qquad f(\mathcal{V}^\perp) \subseteq \mathcal{V}^\perp$$

Ισχύει η αντίστροφη συνεπαγωγή;

Λύση. *Υπενθυμίζουμε πρώτα το εξής:*

Θεωρία: *Έστω* $f : \mathcal{E} \longrightarrow \mathcal{F}$ *μια ισομετρία μεταξύ δυο Ευκλειδείων χώρων πεπερασμένης διάστασης. Τότε η* f *είναι μονομορφισμός.*
Απόδειξη: *Έστω* $\vec{x} \in \mathcal{E}$ *έτσι ώστε* $f(\vec{x}) = \vec{0}$. *Τότε* $\|f(\vec{x})\| = 0$ *και επειδή η* f *είναι ισομετρία έπεται ότι* $\|\vec{x}\| = 0$. *Συνεπώς* $\vec{x} = \vec{0}$ *και άρα* $\operatorname{Ker} f = \{\vec{0}\}$, *δηλαδή η* f *είναι* 1-1.

Υποθέτουμε ότι $f(\mathcal{V}) \subseteq \mathcal{V}$ *και έστω ένα διάνυσμα* $\vec{w} \in f(\mathcal{V}^\perp)$. *Θα δείξουμε ότι* $\vec{w} \in \mathcal{V}^\perp$. *Από τη παραπάνω υπενθύμιση έχουμε ότι η* f *είναι μονομορφισμός και επειδή* $f(\mathcal{V}) \subseteq \mathcal{V}$ *έπεται ότι η* f *περιορίζεται σε μια γραμμική απεικόνιση*

$$f_{\mathcal{V}} : \mathcal{V} \longrightarrow \mathcal{V}, \quad f_{\mathcal{V}}(\vec{x}) = f(\vec{x})$$

Επειδή ο $\mathcal{V}$ *είναι Ευκλείδειος χώρος, ώς υπόχωρος του Ευκλείδειου χώρου* $\mathcal{E}$, *και επειδή η* f *παραμένει ισομετρία περιορισμένη στον* $\mathcal{V}$, *έπεται ότι η* $f_{\mathcal{V}}$ *είναι ισομετρία και άρα είναι μονομορφισμός. Επειδή ο* $\mathcal{V}$

έχει πεπερασμένη διάσταση, ώς υπόχωρος του $\mathcal{E}$, έπεται ότι η $f_{\mathcal{V}}$ είναι ισομορφισμός και ιδιαίτερα είναι επί. Άρα:

$$f(\mathcal{V}) = \mathcal{V} \tag{$*$}$$

Επειδή $\vec{w} \in f(\mathcal{V}^\perp)$, έχουμε ότι $\vec{w} = f(\vec{z})$ για κάποιο $\vec{z} \in \mathcal{V}^\perp$. Έστω $\vec{v} \in \mathcal{V}$. Επειδή η f περιορισμένη στον $\mathcal{V}$ είναι επί, από τη σχέση $(*)$, έχουμε $\vec{v} = f(\vec{v'})$ για κάποιο $\vec{v'} \in \mathcal{V}$ και άρα

$$\begin{aligned} \big\langle \vec{v}, \vec{w} \big\rangle &= \big\langle f(\vec{v'}), f(\vec{z}) \big\rangle \\ &= \big\langle \vec{v'}, \vec{z} \big\rangle && f : \text{ισομετρία} \\ &= 0 && \vec{z} \in \mathcal{V}^\perp \end{aligned}$$

Επομένως $\vec{w} \in \mathcal{V}^\perp$ και άρα πράγματι δείξαμε: $f(\mathcal{V}^\perp) \subseteq \mathcal{V}^\perp$.

Αντίστροφα έστω ότι ισχύει $f(\mathcal{V}^\perp) \subseteq \mathcal{V}^\perp$. Τότε αν αντικαταστήσουμε όπου $\mathcal{V}$ με $\mathcal{V}^\perp$ έχουμε ότι $f((\mathcal{V}^\perp)^\perp) \subseteq (\mathcal{V}^\perp)^\perp$ και άρα $f(\mathcal{V}) \subseteq \mathcal{V}$, διότι όπως γνωρίζουμε ισχύει ότι $(\mathcal{V}^\perp)^\perp = \mathcal{V}$ επειδή ο $\mathcal{E}$ έχει πεπερασμένη διάσταση. □

Άσκηση 4. (1) *Θεωρούμε τον Ευκλείδειο χώρο $\mathbb{R}^4$ εφοδιασμένο με το συνηθισμένο εσωτερικό γινόμενο και τους υποχώρους του*

$$\begin{aligned} \mathcal{V} &= \{(x, y, z, w) \in \mathbb{R}^4 \mid 2x + 3y + z = 0\} \\ \mathcal{W} &= \{(x, y, z, w) \in \mathbb{R}^4 \mid x - y + w = 0\} \end{aligned}$$

Να βρεθεί μια ισομετρία $f : (\mathcal{V}, \langle,\rangle) \longrightarrow (\mathbb{R}_2[t], \langle,\rangle)$ και μια ισομετρία $g : (\mathcal{W}, \langle,\rangle) \longrightarrow (\mathbb{R}^3, \langle,\rangle)$.

(2) *Να εξετασθεί αν υπάρχει ισομετρία $h : (\mathcal{V} \cap \mathcal{W}, \langle,\rangle) \longrightarrow (\mathsf{M}_{n\times n}(\mathbb{R}), \langle,\rangle)$, για κατάλληλο $n \geq 1$.*

Λύση. *Από την περιγραφή των συνόλων $\mathcal{V}$ και $\mathcal{W}$, εύκολα βλέπουμε ότι το σύνολο*

$$\mathcal{B}_1 = \big\{(1, 0, -2, 0),\ (0, 1, -3, 0),\ (0, 0, 0, 1)\big\}$$

είναι μια βάση του $\mathcal{V}$, και το σύνολο

$$\mathcal{C}_1 = \big\{(1, 1, 0, 0),\ (0, 1, 0, 1),\ (0, 0, 1, 0)\big\}$$

είναι μια βάση του $\mathcal{W}$. Άρα:

$$\dim_{\mathbb{R}} \mathcal{V} = 3 = \dim_{\mathbb{R}} \mathbb{R}_2[t] \qquad \text{και} \qquad \dim_{\mathbb{R}} \mathcal{W} = 3 = \dim_{\mathbb{R}} \mathbb{R}^3$$

Επειδή οι Ευκλείδειοι χώροι $(\mathcal{V}, \langle,\rangle)$ και $(\mathbb{R}_2[t]$ έχουν την ίδια διάσταση, έπεται ότι είναι ισομετρικά ισόμορφοι, και παρόμοια επειδή οι Ευκλείδειοι χώροι $(\mathcal{W}, \langle,\rangle)$ και $(\mathbb{R}^3, \langle,\rangle)$ έχουν την ίδια διάσταση, έπεται ότι είναι ισομετρικά ισόμορφοι.

1. *Για να κατασκευάσουμε μια ισομετρία $f : \mathcal{V} \longrightarrow \mathbb{R}_2[t]$, βρίσκουμε πρώτα ορθοκανονικές βάσεις των $\mathcal{V}$ και $\mathbb{R}_2[t]$.*

Με την διαδικασία Gram-Schmidt στη βάση $\mathcal{B}_1$ βλέπουμε ότι το σύνολο

$$\mathcal{B} = \Big\{\vec{e}_1 = \frac{1}{\sqrt{10}}(0, 1, -3, 0), \quad \vec{e}_2 = \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{7}}(1, -\frac{3}{5}, -\frac{1}{5}, 0), \quad \vec{e}_3 = (0, 0, 0, 1)\Big\}$$

είναι μια ορθοκανονική βαση του $\mathcal{V}$.

Η διαδικασία Gram-Schmidt στην κανονική βάση $\{1, t, t^2\}$ του $\mathbb{R}_2[t]$ δίνει, ως γνωστόν την ορθοκανονική βάση

$$\mathcal{F} = \Big\{\vec{\epsilon}_1 = 1, \quad \vec{\epsilon}_2 = \sqrt{12}(t - \frac{1}{2}), \quad \vec{\epsilon}_3 = \sqrt{180}(t^2 - t + \frac{1}{6})\Big\}$$

Τότε υπάρχει μοναδική ισομετρία $f : \mathcal{V} \longrightarrow \mathbb{R}_2[t]$ έτσι ώστε:

$$f(\vec{e}_i) = \vec{\epsilon}_i, \quad 1 \leq i \leq 3$$

Αν θέλουμε να υπολογίσουμε τον ακριβή τύπο ορισμού της f σε ένα διάνυσμα $\vec{\zeta} = (x, y, z, w) \in \mathcal{V}$, εκφράζουμε το $\vec{\zeta}$ ως γραμμικό συνδυασμό $\vec{\zeta} = \kappa\vec{e}_1 + \lambda\vec{e}_2 + \mu\vec{e}_3$ της ΟΚΒ $\mathcal{B}$, και κατόπιν εφαρμόζουμε την f: $f(\vec{\zeta}) = \kappa f(\vec{e}_1) + \lambda f(\vec{e}_2) + \mu f(\vec{e}_3) = \kappa\vec{\epsilon}_1 + \lambda\vec{\epsilon}_2 + \mu\vec{\epsilon}_3$ απ' όπου προκύπτει μετά από πράξεις το ζητούμενο.

Παρόμοια κατασκευάζουμε μια ισομετρία μεταξύ των $\mathcal{W}$ και $\mathbb{R}^3$.

2. *Για να υπάρχει ισομετρία $h\colon (\mathcal{V} \cap \mathcal{W}, \langle , \rangle) \longrightarrow (\mathsf{M}_{n\times n}(\mathbb{R}), \langle , \rangle)$, για κατάλληλο $n \geq 1$, θα πρέπει*

$$\mathsf{dim}_{\mathbb{R}}(\mathcal{V} \cap \mathcal{W}) = n^2 = \mathsf{dim}_{\mathbb{R}}\mathsf{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$$

Επειδή $\mathsf{dim}_{\mathbb{R}}\mathcal{V} = 3 = \mathsf{dim}_{\mathbb{R}}\mathcal{W}$, έπεται ότι:

$$\mathsf{dim}_{\mathbb{R}}(\mathcal{V} \cap \mathcal{W}) = \mathsf{dim}_{\mathbb{R}}\mathcal{V} + \mathsf{dim}_{\mathbb{R}}\mathcal{W} - \mathsf{dim}_{\mathbb{R}}(\mathcal{V} + \mathcal{W}) = 6 - \mathsf{dim}_{\mathbb{R}}(\mathcal{V} + \mathcal{W})$$

Η ένωση των βάσεων

$$\mathcal{B}_1 \bigcup \mathcal{C}_1 = \Big\{(1, 0, -2, 0),\ (0, 1, -3, 0),\ (0, 0, 0, 1)\Big\} \ \bigcup\ \Big\{(1, 1, 0, 0),\ (0, 1, 0, 1),\ (0, 0, 1, 0)\Big\}$$

των $\mathcal{V}$ και $\mathcal{W}$ είναι προφανώς ένα σύνολο γεννητόρων του $\mathcal{V} + \mathcal{W}$ και εύκολα βλέπουμε ότι το υποσύνολο

$$\mathcal{D} = \Big\{(1, 1, 0, 0),\ (0, 1, 0, 1),\ (0, 0, 1, 0),\ (0, 0, 0, 1)\Big\}$$

είναι βάση του $\mathcal{V} + \mathcal{W}$ και επομένως $\mathsf{dim}_{\mathbb{R}}(\mathcal{V} + \mathcal{W}) = 4$. Με άλλα λόγια $\mathcal{V} + \mathcal{W} = \mathbb{R}^4$. Τότε όμως

$$\mathsf{dim}_{\mathbb{R}}(\mathcal{V} \cap \mathcal{W}) = 2$$

Επειδή δεν υπάρχει φυσικός $n \geq 1$ έτσι ώστε $n^2 = 2$, συμπεραίνουμε ότι δεν υπάρχει ισομετρία $h\colon (\mathcal{V} \cap \mathcal{W}, \langle , \rangle) \longrightarrow (\mathsf{M}_{n\times n}(\mathbb{R}), \langle , \rangle)$, $\forall n \geq 1$. $\square$

Άσκηση 5. *Θεωρούμε τον πίνακα*

$$A = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{14}} & * & * \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{2}{\sqrt{14}} & * & * \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{-3}{\sqrt{14}} & * & * \\ 0 & 0 & * & * \end{pmatrix}$$

Συμπληρώστε τον πίνακα A έτσι ώστε να είναι ορθογώνιος.

Λύση. *Για να είναι ο πίνακας A ορθογώνιος πρέπει να τον συμπληρώσουμε με κατάλληλα διανύσματα στήλες έτσι ώστε να έχουν μέτρο ένα και να είναι κάθετα μεταξύ τους. Θέτουμε*

$$\Sigma_1 = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \Sigma_2 = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{14}} \\ \frac{2}{\sqrt{14}} \\ \frac{-3}{\sqrt{14}} \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{και} \quad \Sigma_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Τότε $\|\Sigma_3\| = 1$ *και* $\langle \Sigma_1, \Sigma_3\rangle = \langle \Sigma_2, \Sigma_3\rangle = 0$. *Έστω*

$$\Sigma_4 = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \\ \delta \end{pmatrix}$$

Θέλουμε το διάνυσμα στήλη Σ_4 να έχει μέτρο ένα και να είναι κάθετο με τα τρία προηγούμενα διανύσματα στήλες του πίνακα A, δηλαδή: $\|\Sigma_4\| = 1$ *και* $\langle \Sigma_1, \Sigma_4 \rangle = \langle \Sigma_2, \Sigma_4 \rangle = \langle \Sigma_3, \Sigma_4 \rangle = 0$. *Έχουμε:*

$$\Big\langle \Sigma_3, \Sigma_4 \Big\rangle = \Big\langle \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \\ \delta \end{pmatrix} \Big\rangle = 0 \implies \delta = 0$$

$$\Big\langle \Sigma_1, \Sigma_4 \Big\rangle = \Big\langle \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \\ \delta \end{pmatrix} \Big\rangle = 0 \implies \alpha + \beta + \gamma = 0 \implies \alpha = -\beta - \gamma \tag{1}$$

$$\Big\langle \Sigma_2, \Sigma_4 \Big\rangle = \Big\langle \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{14}} \\ \frac{2}{\sqrt{14}} \\ \frac{-3}{\sqrt{14}} \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \\ \delta \end{pmatrix} \Big\rangle = 0 \implies \alpha + 2\beta - 3\gamma = 0 \overset{(1)}{\implies} \begin{cases} \beta = 4\gamma \\ \\ \alpha = -5\gamma \end{cases}$$

Αφού λοιπόν $\delta = 0$, $\beta = 4\gamma$ *και* $\alpha = -5\gamma$ *τότε:*

$$\begin{aligned} \|\Sigma_4\| = 1 \quad &\implies \quad \sqrt{\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2} = 1 \\ &\implies \quad \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = 1 \\ &\implies \quad (-5\gamma)^2 + (4\gamma)^2 + \gamma^2 = 1 \\ &\implies \quad 25\gamma^2 + 16\gamma^2 + \gamma^2 = 1 \\ &\implies \quad 42\gamma^2 = 1 \\ &\implies \quad \gamma = \pm\frac{1}{\sqrt{42}} \end{aligned}$$

Άρα η στήλη Σ_4 που ψάχνουμε είναι

$$\Sigma_4 = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \\ \delta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{-5}{\sqrt{42}} \\ \frac{4}{\sqrt{42}} \\ \frac{1}{\sqrt{42}} \\ 0 \end{pmatrix} \quad ή \quad \Sigma_4 = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \\ \delta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{5}{\sqrt{42}} \\ \frac{-4}{\sqrt{42}} \\ \frac{-1}{\sqrt{42}} \\ 0 \end{pmatrix}$$

Επομένως ο πίνακας

$$A = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{14}} & 0 & \frac{-5}{\sqrt{42}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{2}{\sqrt{14}} & 0 & \frac{4}{\sqrt{42}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{-3}{\sqrt{14}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{42}} \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad ή \quad A = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{14}} & 0 & \frac{5}{\sqrt{42}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{2}{\sqrt{14}} & 0 & \frac{-4}{\sqrt{42}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{-3}{\sqrt{14}} & 0 & \frac{-1}{\sqrt{42}} \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

είναι ορθογώνιος. $\square$

Άσκηση 6. *Θεωρούμε την απεικόνιση*

$$\langle\ ,\ \rangle' \ : \ \mathbb{R}^3 \ \times \ \mathbb{R}^3 \ \longrightarrow \ \mathbb{R}, \qquad \big\langle (x_1,x_2,x_3),(y_1,y_2,y_3)\big\rangle' = 4x_1y_1 + 2x_2y_2 + 8x_3y_3$$

(1) *Δείξτε ότι η απεικόνιση* $\langle\ ,\ \rangle'$ *ορίζει ένα εσωτερικό γινόμενο στον* $\mathbb{R}^3$.
(2) *Να δείξετε ότι η γραμμική απεικόνιση*

$$f \ : \ \big(\mathbb{R}^3, \langle\ ,\ \rangle\big) \ \longrightarrow \ \big(\mathbb{R}^3, \langle\ ,\ \rangle'\big), \qquad f(x,y,z) = \big(\frac{x}{2}, \frac{y}{\sqrt{2}}, \frac{z}{2\sqrt{2}}\big)$$

είναι μια ισομετρία, όπου $\langle\ ,\ \rangle$ *είναι το συνηθισμένο εσωτερικό γινόμενο του* $\mathbb{R}^3$.

Λύση. *Έστω* $(x_1,x_2,x_3),(y_1,y_2,y_3),(z_1,z_2,z_3) \in \mathbb{R}^3$ *και* $\lambda \in \mathbb{R}$. *Τότε έχουμε:*

$$\begin{aligned}
\langle (x_1,x_2,x_3),(y_1,y_2,y_3)\rangle' &= 4x_1y_1 + 2x_2y_2 + 8x_3y_3 \\
&= 4y_1x_1 + 2y_2x_2 + 8y_3x_3 \\
&= \langle (y_1,y_2,y_3),(x_1,x_2,x_3)\rangle'
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\langle (x_1,x_2,x_3)+(y_1,y_2,y_3),(z_1,z_2,z_3)\rangle' &= \langle (x_1+y_1,x_2+y_2,x_3+y_3),(z_1,z_2,z_3)\rangle' \\
&= 4(x_1+y_1)z_1 + 2(x_2+y_2)z_2 + 8(x_3+y_3)z_3 \\
&= 4x_1z_1 + 4y_1z_1 + 2x_2z_2 + 2y_2z_2 + 8x_3z_3 + 8y_3z_3 \\
&= 4x_1z_1 + 2x_2z_2 + 8x_3z_3 + 4y_1z_1 + 2y_2z_2 + 8y_3z_3 \\
&= \langle (x_1,x_2,x_3),(z_1,z_2,z_3)\rangle + \langle (y_1,y_2,y_3),(z_1,z_2,z_3)\rangle'
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\langle \lambda(x_1,x_2,x_3),(y_1,y_2,y_3)\rangle' &= \langle (\lambda x_1,\lambda x_2,\lambda x_3),(y_1,y_2,y_3)\rangle' \\
&= 4\lambda x_1y_1 + 2\lambda x_2y_2 + 8\lambda x_3y_3 \\
&= \lambda(4x_1y_1 + 2x_2y_2 + 8x_3y_3) \\
&= \lambda\langle (x_1,x_2,x_3),(y_1,y_2,y_3)\rangle'
\end{aligned}$$

$$\langle (x_1,x_2,x_3),(x_1,x_2,x_3)\rangle' = 4x_1^2 + 2x_2^2 + 8x_3^2 \geq 0$$

και $\langle (x_1,x_2,x_3),(x_1,x_2,x_3)\rangle' = 0$ *αν και μόνο αν* $(x_1,x_2,x_3) = (0,0,0)$. *Άρα η απεικόνιση* $\langle\ ,\ \rangle'$ *ορίζει ένα εσωτερικό γινόμενο στον* $\mathbb{R}^3$. *Έστω* $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$. *Τότε:*

$$\begin{aligned}
\|f(x,y,z)\| &= \sqrt{\big\langle f(x,y,z), f(x,y,z)\big\rangle'} \\
&= \sqrt{\big\langle \big(\frac{x}{2}, \frac{y}{\sqrt{2}}, \frac{z}{2\sqrt{2}}\big), \big(\frac{x}{2}, \frac{y}{\sqrt{2}}, \frac{z}{2\sqrt{2}}\big)\big\rangle'} \\
&= \sqrt{4\cdot\frac{x}{2}\cdot\frac{x}{2} + 2\cdot\frac{y}{\sqrt{2}}\cdot\frac{y}{\sqrt{2}} + 8\cdot\frac{z}{2\sqrt{2}}\cdot\frac{z}{2\sqrt{2}}} \\
&= \sqrt{x^2+y^2+z^2} \\
&= \|(x,y,z)\|
\end{aligned}$$

Άρα η γραμμική απεικόνιση $f : \big(\mathbb{R}^3, \langle\ ,\ \rangle\big) \longrightarrow \big(\mathbb{R}^3, \langle\ ,\ \rangle'\big)$, $f(x,y,z) = \big(\frac{x}{2}, \frac{y}{\sqrt{2}}, \frac{z}{2\sqrt{2}}\big)$ *είναι ισομετρία.* □

Άσκηση 7. *Να δείξετε ότι ο πίνακας*

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

παριστάνει στροφή επιπέδου περί άξονα κάθετο σ' αυτό και να προσδιορίσετε τον άξονα και τη γωνία στροφής.

Λύση. *Ο πίνακας A είναι ορθογώνιος αφού $^{t}A \cdot A = I_3$. Διαφορετικά: βλέπουμε άμεσα ότι οι στήλες του πίνακα A αποτελούν ορθοκανονική βάση του $\mathbb{R}_3$. Επιπλέον εύκολα υπολογίζουμε ότι $|A| = 1$.*

Άρα από το Θεώρημα του Euler ο πίνακας A παριστάνει στροφή επιπέδου (Π) γύρω από άξονα (ε) κάθετο σ' αυτό κατά γωνία θ. Επίσης, από τη Θεωρία γνωρίζουμε ότι ο A έχει ιδιοτιμή το $\lambda = 1$ και ο άξονας στροφής είναι ο ιδιόχωρος $\mathcal{V}(1)$. Έχουμε:

$$A \cdot X = 1 \cdot X \implies \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \implies \begin{pmatrix} y \\ x \\ -z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \implies \begin{cases} x = y \\ \\ z = 0 \end{cases}$$

Τότε ο ιδιόχωρος $\mathcal{V}(1)$, δηλαδή ο άξονας στροφής (ε), είναι

$$\mathcal{V}(1) = \Big\{\kappa \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}_3 \mid \kappa \in \mathbb{R}\Big\} = \Big\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \Big\rangle$$

Το διάνυσμα

$$E_1 = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \end{pmatrix}$$

αποτελεί μια ορθοκανονική βάση του $\mathcal{V}(1)$, την οποία την συμπληρώνουμε σε μια ορθοκανονική βάση του $\mathbb{R}_3$. Εύκολα βρίσκουμε ότι το σύνολο

$$\Big\{E_1 = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \end{pmatrix}, \ E_2 = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{-1}{\sqrt{2}} \\ 0 \end{pmatrix}, \ E_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \Big\}$$

αποτελεί μια ορθοκανονική βάση του $\mathbb{R}_3$. Τότε το επίπεδο (Π) ορίζεται από τον υπόχωρο $\langle E_2, E_3\rangle$. Ο πίνακας A ορίζει τη γραμμική απεικόνιση

$$f \ : \ \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3, \qquad f(x,y,z) = (y,x,-z)$$

και έχουμε τον ορθογώνιο πίνακα

$$P = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{-1}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

που είναι ο πίνακας μετάβασης από τη κανονική βάση $\{\vec{e}_1 = (1,0,0), \vec{e}_2 = (0,1,0), \vec{e}_3 = (0,0,1)\}$ του $\mathbb{R}^3$ στην ορθοκανονική βάση $\{\vec{\epsilon}_1 = (\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0), \vec{\epsilon}_2 = (\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{-1}{\sqrt{2}}, 0), \vec{\epsilon}_3 = (0,0,1)\}$ του $\mathbb{R}^3$. Τότε έχουμε:

$$^{t}P \cdot A \cdot P = \cdots = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$

όπου θ η γωνία στροφής. Συνεπώς αφού $\cos\theta = -1$ έχουμε ότι η γωνία στροφής είναι $\theta = \pi$.

Διαφορετικά τη γωνία στροφής τη βρίσκουμε πιο εύκολα ως εξής:

$$\cos(\theta) = \frac{\mathsf{Tr}A - 1}{2} = \frac{-1-1}{2} = -1 \implies \theta = \pi \qquad \square$$

Άσκηση 8. *Στον Ευκλείδειο χώρο $\mathbb{R}^3$, εφοδιασμένο με το συνηθισμένο εσωτερικό γινόμενο, θεωρούμε τη γραμμική απεικόνιση*

$$f\ :\ \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3, \qquad f(x,y,z) = \Big(\frac{2}{3}x + \frac{2}{3}y + az,\ \frac{2}{3}x - \frac{1}{3}y + bz,\ -\frac{1}{3}x + \frac{2}{3}y + cz\Big)$$

(1) *Να υπολογίσετε τις τιμές των πραγματικών αριθμών a, b και c έτσι ώστε η f να είναι ισομετρία η οποία παριστά στροφή επιπέδου γύρω από άξονα κάθετο σ' αυτό.*

(2) *Αν η f είναι ισομετρία,*

(α') *να υπολογισθεί η γωνία των διανυσμάτων $f(1,0,0)$ και $f(0,1,0)$.*

(β') *να βρεθεί το επίπεδο και ο άξονας περιστροφής του ερωτήματος (1).*

Λύση. (1) *Έστω $\mathcal{B} = \{\vec{e}_1 = (1,0,0), \vec{e}_2 = (0,1,0), \vec{e}_3 = (0,0,1)\}$ η κανονική βάση του $\mathbb{R}^3$. Έχουμε:*

$$\begin{cases} f(1,0,0) = (\frac{2}{3}, \frac{2}{3}, -\frac{1}{3}) \\ f(0,1,0) = (\frac{2}{3}, -\frac{1}{3}, \frac{2}{3}) \\ f(0,0,1) = (a,b,c) \end{cases} \implies \mathcal{M}^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}}(f) := A = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & \frac{2}{3} & a \\ \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & b \\ -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & c \end{pmatrix}$$

και τότε γνωρίζουμε ότι

$$f\ :\ \textit{ισομετρία} \iff A\ :\ \textit{ορθογώνιος}$$

Άρα πρέπει να βρούμε τα $a, b, c \in \mathbb{R}$ έτσι ώστε ο πίνακας A να είναι ορθογώνιος, δηλαδή θέλουμε το διάνυσμα (a,b,c) να είναι κάθετο με τα διανύσματα $(\frac{2}{3}, \frac{2}{3}, -\frac{1}{3})$, $(\frac{2}{3}, -\frac{1}{3}, \frac{2}{3})$ και να έχει μέτρο ένα. Έχουμε:

$$\begin{cases} \big\langle (\frac{2}{3}, \frac{2}{3}, -\frac{1}{3}), (a,b,c) \big\rangle = 0 \\ \big\langle (\frac{2}{3}, -\frac{1}{3}, \frac{2}{3}), (a,b,c) \big\rangle = 0 \\ \|(a,b,c)\| = 1 \end{cases} \implies \begin{cases} 2a + 2b - c = 0 \\ 2a - b + 2c = 0 \\ a^2 + b^2 + c^2 = 1 \end{cases}$$

Αφαιρώντας από τη πρώτη εξίσωση τη δεύτερη βρίσκουμε ότι $b = c$ και άρα $a = -\frac{b}{2}$. Συνεπώς έχουμε $(a,b,c) = (-\frac{k}{2}, k, k), k \in \mathbb{R}$ και από τη τρίτη εξίσωση έπεται ότι

$$a^2 + b^2 + c^2 = 1 \implies \frac{k^2}{4} + k^2 + k^2 = 1 \implies 9k^2 = 4 \implies k = \pm\frac{2}{3}$$

Συνεπώς $(a,b,c) = (-\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{2}{3})$ ή $(a,b,c) = (\frac{1}{3}, -\frac{2}{3}, -\frac{2}{3})$ και άρα

$$A = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix} \quad \text{ή} \quad A = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & -\frac{2}{3} \\ -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{2}{3} \end{pmatrix}$$

Όμως θέλουμε η f να είναι ισομετρία η οποία παριστά στροφή επιπέδου γύρω από άξονα κάθετο σ' αυτό, δηλαδή ισοδύναμα: $|A| = 1$. Υπολογίζουμε

$$\begin{vmatrix} \frac{2}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & \frac{2}{3} \end{vmatrix} = -1$$

και άρα

$$A = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & -\frac{2}{3} \\ -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{2}{3} \end{pmatrix}$$

Συνεπώς για $a = \frac{1}{3}$, $b = -\frac{2}{3}$ *και* $c = -\frac{2}{3}$ *η* f *είναι ισομετρία η οποία παριστά στροφή επιπέδου γύρω από άξονα κάθετο σ' αυτό.*

(2) *Αφού η* f *είναι ισομετρία έπεται ότι η* f *διατηρεί τη γωνία δυο διανυσμάτων. Άρα αφου τα διανύσματα* $(0,1,0)$ *και* $(1,0,0)$ *είναι κάθετα μεταξύ τους έπεται ότι η γωνία των διανυσμάτων* $f(1,0,0)$ *και* $f(0,1,0)$ *είναι* $\frac{\pi}{2}$.

Στη συνέχεια θα βρούμε το επίπεδο και τον άξονα περιστροφής του ερωτήματος (1). *Από τη Θεωρία γνωρίζουμε ότι ο* A *έχει ιδιοτιμή το* $\lambda = 1$ *και ο άξονας περιστροφής είναι ο ιδιόχωρος* $\mathcal{V}(1)$. *Έχουμε:*

$$A \cdot X = 1 \cdot X \implies \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} & -\frac{4}{3} & -\frac{2}{3} \\ -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{5}{3} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \implies \begin{cases} -x + 2y + z = 0 \\ 2x - 4y - 2z = 0 \\ -x + 2y - 5z = 0 \end{cases}$$

Τότε

$$\begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 2 & -4 & -2 \\ -1 & 2 & -5 \end{pmatrix} \xrightarrow[\Gamma_3 \to \Gamma_3 - \Gamma_1]{\Gamma_2 \to \Gamma_2 + 2\Gamma_1} \begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -6 \end{pmatrix} \implies \begin{cases} -x + 2y + z = 0 \\ \\ -6z = 0 \end{cases} \implies \begin{cases} x = 2y, \ y \in \mathbb{R} \\ \\ z = 0 \end{cases}$$

και άρα ο ιδιόχωρος $\mathcal{V}(1)$, *δηλαδή ο άξονας περιστροφής* (ε), *είναι*

$$\mathcal{V}(1) = \big\{(2y, y, 0) \in \mathbb{R}_3 \mid y \in \mathbb{R}\big\} = \big\langle (2,1,0) \big\rangle$$

Το σύνολο $\{\vec{\epsilon}_1 = \frac{1}{\sqrt{5}}(2,1,0)\}$ *αποτελεί μια ορθοκανονική βάση του* $\mathcal{V}(1)$, *την οποία την συμπληρώνουμε σε μια ορθοκανονική βάση του* $\mathbb{R}^3$. *Έστω* $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$. *Τότε*

$$\langle (x,y,z), \frac{1}{\sqrt{5}}(2,1,0) \rangle = 0 \implies 2x + y = 0 \implies y = -2x$$

Άρα για $x = 1$ *έχουμε το διάνυσμα* $(1,-2,0)$ *με μέτρο* $\|(1,-2,0)\| = \sqrt{5}$ *και θέτουμε* $\vec{\epsilon}_2 = \frac{1}{\sqrt{5}}(1,-2,0)$. *Ακόμα έχουμε:*

$$\begin{cases} \big\langle (\frac{2}{\sqrt{5}}, \frac{1}{\sqrt{5}}, 0), (x,y,z) \big\rangle = 0 \\ \\ \big\langle (\frac{1}{\sqrt{5}}, -\frac{2}{\sqrt{5}}, 0), (x,y,z) \big\rangle = 0 \end{cases} \implies \begin{cases} 2x + y = 0 \\ \\ x - 2y = 0 \end{cases} \implies \quad x = y = 0 \quad \textit{και} \quad z \in \mathbb{R}$$

Για $z = 1$ *έχουμε* $\vec{\epsilon}_3 = (0,0,1)$ *και άρα μια ορθοκανονική βάση του* $\mathbb{R}^3$ *είναι*

$$\big\{\vec{\epsilon}_1 = \frac{1}{\sqrt{5}}(2,1,0), \vec{\epsilon}_2 = \frac{1}{\sqrt{5}}(1,-2,0), \vec{\epsilon}_3 = (0,0,1)\big\}$$

Τότε το επίπεδο (π) *ορίζεται από τον υπόχωρο* $\langle \vec{\epsilon}_2, \vec{\epsilon}_3 \rangle$. *Τέλος η γωνία περιστροφής είναι*

$$\cos(\theta) = \frac{\mathsf{Tr} A - 1}{2} = \cdots = -\frac{2}{3} \qquad \square$$